運動のモード解析

【状態方程式】

の一般解を求める．正方行列

の固有値，右固有ベクトル，左固有ベクトルをそれぞれ

また，

とする．このとき

が成り立つ．一般に必要な状態変数のみで航空機の運動を記述した場合，その状態方程式の A 行列は重複する固有値を持たない．ここで，初期値 x0 に対する状態方程式の一般解は，

である．さらに，A 行列を対角化することで変形すると，

■【一般解】

となる．特に u(t)=0 のときは，

■【初期値応答】

となり，初期値応答が各モードの重ねあわせで表現されることがわかる．行列 A は実数行列であるため，その固有値，固有ベクトルは実数もしくは共役な複素数のペアで現れる．j と j+1 番目の固有値，固有ベクトルが共役な複素数として，

とおく．これらを【初期値応答】に代入し j 番目のモードを取り出すと，

となる．

の比は固有ベクトルの各要素の絶対値の比に一致し，

は固有ベクトルの各要素の偏角の差に一致する．従って A 行列の固有値，固有ベクトルを調べることで，初期値応答の性質を詳しく理解できる．

■数値例

CONVAIR 880M が U0 =68.9 [m/s], W0=6.26 [m/s], θ 0=5.2 [deg] 水平直線飛行しているときの状態変数と A 行列は,

である．これらの A 行列の固有構造を計算する．

【縦運動の固有値，固有ベクトル】

【横・方向運動の固有値，固有ベクトル】

縦運動

数値例の縦運動の固有値 -0.64 ± 0.47i のモードは -0.014 ± 0.13i のモードと比べて振動が速く減衰も大きい．これを短周期モードと呼ぶ．一方 -0.014 ± 0.13i のモードを長周期モード, もしくはフゴイドモードと呼ぶ．この数値例に限らず，一般に航空機の縦運動には減衰が強く振動数も速

い短周期モードと，比較的減衰が弱く振動数も遅い長周期モードが存在する．

すでに述べたように，固有ベクトルの各要素の絶対値を比較することで，それぞれのモードで卓越した状態量を調べることができる．数値例において短周期モードの固有ベクトル u に対応した要素 -0.99 と α に対応した要素 (0.068-0.10i) の絶対値に U0 をかけて比較すると, u の振動があまり起こっていないことがわかる．また長周期モードでは短周期モードに比べて q の振動が小さい．これらのモードの特徴を利用して次数の低い運動の近似式を導くことができる．式を簡単にするため，釣合状態で θ 0=0 となるように座標を定める．これを安定軸と呼ぶ．さらに値の小さな微係数を

として省略する．【縦の状態方程式】において，u=0 とし α と q の式を取り出し，エレベータ入力のみを考える．

■【短周期近似】

短周期モード近似式の特性方程式は,

である．従って

である．

【縦の線形化運動方程式】において，u=0 としてモーメント式を省略する．

さらに

を代入して状態方程式の形に直す．

■【長周期近似】

特性方程式は,

である．

横・方向運動

数値例の固有値 -1.5 のモードはロールモードと呼ばれ減衰が強くロール運動が卓越する．固有値 -0.12 ± 1.0i のモードはダッチロールモードと呼ばれローリングとヨーイングが練成した比較的減衰の弱い振動モードである．また

が成り立つ．固有値 -0.0091 のモードはスパイラルモードと呼ばれ, 時定数の小さな発散もしくは収束するモードである．このように航空機の横方向運動には，減衰の強いロールモード，振動するダッチロールモード，穏やかに減衰もしくは発散するスパイラルモードが存在する．

横・方向運動には縦運動ほど精度が良く使いやすい近似式は無い．以下に簡単な近似式を与える．

ヨーイングの式において

とすると，

■【ダッチロール近似】

特性方程式は

である．

次にローリングの式で p 以外の項をすべて 0 とおくと

■【ロール近似】

を得る.

これら近似式の利点は，伝達関数の零点，極と安定微係数の関係が明らかになることである. 従って飛行条件や微係数の不確かさの運動特性への影響や，機体形状と運動特性の関係を評価することができる.

UAV の作り方へ戻る